ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

4ο φυλλάδιο ασκήσεων

1) Αποδείξτε την ακόλουθη (ισοδύναμη μορφή) του θεωρήματος Baire: Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X με $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $(F_{n_0})^o \neq \emptyset$. [Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Baire και απαγωγή σε άτοπο, χρησιμοποιώντας τα σύνολα $G_n = X \setminus F_n$.]

2) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(i) Για κάθε οικογένεια ανοικτών συνόλων $(G_i)_{i\in I}$ του X με $A \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$ υπάρχει $J \subseteq I$ με J πεπερασμένο, ώστε $A \subseteq \bigcup_{i\in J} G_i$.
(ii) Ο μετρικός χώρος (A,ρ_A), όπου ρ_A η σχετική μετρική, είναι συμπαγής.

3) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και K ένα συμπαγές μη κενό υποσύνολο του X. Δείξτε ότι υπάρχουν $x_0, y_0 \in X$ ώστε $\rho(x_0,y_0) = \operatorname{diam}(K)$.

4) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και K, Λ δυο συμπαγή μη κενά υποσύνολα του X. Δείξτε ότι υπάρχουν $x_0 \in K$ και $y_0 \in \Lambda$ ώστε $\rho(x_0,y_0) = \rho(K,\Lambda)$.

5) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, K ένα συμπαγές μη κενό υποσύνολο του X και F ένα κλειστό μη κενό υποσύνολο του X ώστε $K \cap F = \emptyset$. Δείξτε ότι $\rho(K,F) > 0$. [Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε απαγωγή σε άτοπο, και κάνετε χρήση ακολουθιών.]

6) α) Δώστε ένα παράδειγμα δυο μη κενών κλειστών και ξένων υποσυνόλων A, B του $\mathbb{R}^2$ ώστε $\rho(A,B) = 0$.
β) Κάντε το ίδιο για υποσύνολα του $\mathbb{R}$.
[Σημείωση: Τα παραδείγματα αυτά δείχνουν ότι στις προηγούμενες δύο ασκήσεις δεν μπορούν τα συμπαγή να αντικατασταθούν από κλειστά.]

7) Δώστε παράδειγμα (σε κατάλληλο μετρικό χώρο) παραδείγματος δύο ξένων συνόλων K, F ώστε K συμπαγές, F κλειστό, ώστε να μην υπάρχουν $x \in K$ και $y \in F$ με $\rho(x,y) = \rho(K,F)$. [Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το μετρικό χώρο της τελευταίας άσκησης στο Φυλλάδιο 3.]
[Σημείωση: Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι το συμπέρασμα της άσκησης 4) δεν ισχύει αν εξασθενήσουμε την υπόθεση ότι τα δύο σύνολα είναι συμπαγή, θεωρώντας ένα συμπαγές και ένα κλειστό.]

8) Έστω (X,ρ) ένας συμπαγής μετρικός χώρος, $(F_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής και V ένα ανοικτό υποσύνολο του X ώστε $\bigcap_{i\in I} F_i \subseteq V$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο J του I ώστε $\bigcap_{i\in J} F_i \subseteq V$. [Υπόδειξη: Υποθέτοντας ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα, δείξτε ότι η οικογένεια κλειστών συνόλων $\Big(F_i \cap (X \setminus V)\Big)_{i\in I}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Αυτό οδηγεί εύκολα σε άτοπο.]

9) Χωρίς να θεωρηθεί δεδομένη η ισοδυναμία της συμπάγειας με την ακολουθιακή συμπάγεια να δειχθούν τα εξής:
α) Αν (X,ρ) είναι ένας μετρικός χώρος και K ένα ακολουθιακά συμπαγές υποσύνολο του X τότε το K είναι κλειστό.
β) Αν (X,ρ) είναι ένας ακολουθιακά συμπαγής μετρικός χώρος και K ένα κλειστό υποσύνολο του X τότε το K είναι ακολουθιακά συμπαγές.
γ) Κάθε ακολουθιακά συμπαγής μετρικός χώρος είναι πλήρης.
δ) Αν $f : (X,\rho) \to (Y,d)$ είναι συνεχής και K είναι ένα ακολουθιακά συμπαγές υποσύνολο του X τότε το $f(K)$ είναι ακολουθιακά συμπαγές υποσύνολο του Y.